

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2025

Εξεταζόμενο μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Ημερομηνία: 02 – 06 – 2025
Ώρα ανάρτησης: 11:30



ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Φροντιστήριο Μέσης Εκπαίδευσης



ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σελ. 186 σχολικό βιβλίο

A2. Ορισμός σελ. 76 σχολικό βιβλίο

A3. Ορισμός σελ. 161 σχολικό βιβλίο

A4. α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9$ και αφού έχει ακρότατο στο $x = 1$ από το Θεώρημα του Fermat θα έχουμε

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -12 \Leftrightarrow \alpha = -6.$$

Τότε $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ με $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$ και

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3.$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f					

Η f έχει πράγματι ακρότατο στο $x = 1$ για $\alpha = -6$, οπότε η λύση είναι δεκτή.

B2. • Αν $x \in [0, 1] = A_1$, η $f \uparrow$, άρα

$$f(A_1) = [f(0), f(1)] = [-3, 1].$$

Το $0 \in f(A_1)$, άρα υπάρχει $\rho_1 \in (-\infty, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_1) = 0$ και η $f \uparrow$, άρα ρ_1 μοναδικό.

• Αν $x \in [1, 3] = A_2$ η $f \downarrow$, άρα

$$f(A_2) = [f(3), f(1)] = [-3, 1].$$

Το $0 \in f(A_2)$ άρα υπάρχει $\rho_2 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_2) = 0$ και η $f \downarrow$ άρα ρ_2 μοναδικό.





- Αν $x \in [3, +\infty) = A_3$ η $f \uparrow$ άρα

$$f(A_3) = [f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [-3, +\infty).$$

Το $0 \in f(A_3)$ άρα υπάρχει $\rho_3 \in (3, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_3) = 0$ και η $f \uparrow$, άρα ρ_3 μοναδικό.
Επομένως η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες, θετικές.

- B3.** Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x) = 6x - 12$. Έχουμε

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = 2$$

και

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x > 12 \Leftrightarrow x > 2.$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f			

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής το $A(2, f(2))$ δηλαδή το $A(2, 0)$.

- B4.** Έστω $g(x) = x + f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 3$.

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = 1 + f'(x)$.

Η εφαπτομένη (ε_1) της C_f στο $(\xi, f(\xi))$ είναι

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi).$$

Η ε_1 τέμνει τον $y'y$ για $x = 0$, άρα

$$y = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

δηλαδή τον τέμνει στο $K(0, f(\xi) - \xi f'(\xi))$.

Η εφαπτομένη (ε_2) της C_g στο $(\xi, g(\xi))$ είναι η

$$y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi).$$

Για $x = 0$ είναι

$$y = g(\xi) - \xi g'(\xi) = \xi + f(\xi) - \xi(1 + f'(\xi)) = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

Άρα οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο K του $y'y$.





ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εξετάζουμε την f ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 0$. Πρέπει $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. Έχουμε

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \eta\mu x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, επομένως, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Για την παραγωγισιμότητα:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \cdot \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = +\infty,$$

επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2. Θα βρούμε τις ασύμπτωτες της f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Εξετάζουμε για πλάγιες ασύμπτωτες της f στο $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = 1 = \lambda$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \frac{1}{2} = \beta \end{aligned}$$

άρα η $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

Πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \eta\mu x}{x}$$





διότι γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x| \leq 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \frac{1}{x} = 0 \cdot 0 = 0,$$

άρα

$$\left| \frac{e^x}{x} \eta\mu x \right| \leq \left| \frac{e^x}{x} \right| \Leftrightarrow - \left| \frac{e^x}{x} \right| \leq \frac{e^x}{x} \eta\mu x \leq \left| \frac{e^x}{x} \right|$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{e^x}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow -\infty} - \left| \frac{e^x}{x} \right| = 0,$$

επομένως από το κριτήριο παρεμβολής, είναι 0.

Θα εξετάσουμε για οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \eta\mu x = 0.$$

Άρα η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$.

Γ3. Θέλουμε $f(x) = x + \frac{1}{2}$. Θέτουμε $g(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$, $x \in [-\pi, 0]$.

• Η g είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

• $\blacksquare g(-\pi) = e^{-\pi} \eta\mu(-\pi) - (-\pi) = \pi - \frac{1}{2} > 0$

$\blacksquare g(0) = e^0 \eta\mu 0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0,$

άρα $g(\pi)g(0) < 0$.

Από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \xi + \frac{1}{2}$.

Γ4. Είναι $y = \sqrt{x^2 + x}$, άρα $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$. Θέλουμε $y'(t) = x'(t)$. Παραγωγίζουμε:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} \cdot 2x(t)x'(t) + x'(t) \\ &= \frac{x'(t)(2x(t) + 1)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}. \end{aligned}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} y'(t) &= x'(t) \Leftrightarrow \frac{x'(t)(2x(t) + 1)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = x'(t) \\ &\Leftrightarrow 2x(t) + 1 = 2\sqrt{x^2(t) + x(t)} \\ &\Leftrightarrow (2x(t) + 1)^2 = 4(x^2(t) + x(t)) \\ &\Leftrightarrow 1 = 0, \text{ άτοπο.} \end{aligned}$$

Επομένως, δεν υπάρχει $t_0 \geq 0$ τέτοιο ώστε $y'(t_0) = x'(t_0)$.





ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η F είναι παράγουσα της f άρα $F'(x) = f(x)$. Η εφαπτομένη (ε_1) της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην (ε): $y = 2x$, άρα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon}$, δηλαδή $f'(1) = 2$.

Η $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}}$, $x > 0$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκιο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = \frac{F'(x)x^{\ln x} - F(x)(x^{\ln x})'}{(x^{\ln x})^2} \quad \textcircled{1}.$$

Όμως:

$$\begin{aligned} (x^{\ln x})' &= (e^{\ln x \cdot \ln x})' = (e^{\ln x \cdot \ln x}) \\ &= e^{(\ln x)^2} \left(\frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} \ln x \right) \\ &= e^{(\ln x)^2} \cdot \frac{2 \ln x}{x} = x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x}. \end{aligned}$$

Άρα αντικαθιστώντας στην $\textcircled{1}$ έχουμε

$$g'(x) = \frac{f(x)x^{\ln x} - \frac{xf(x)}{2 \ln x} \cdot x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x}}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x)x^{\ln x} - f(x)x^{\ln x}}{(x^{\ln x})^2} = 0,$$

άρα η g είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

Δ2. i. Για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 2F(1) \cdot 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$. Όμως:

$$\begin{aligned} (xf(x))' &= (2F(x) \ln x)' \\ f(x) + xf'(x) &= 2f(x) \ln x + 2F(x) \frac{1}{x} \\ xf'(x) &= 2f(x) \ln x + 2 \frac{F(x)}{x} - f(x) \quad \textcircled{2} \end{aligned}$$

για $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{2f(x) \ln x}{x} + \frac{2F(x)}{x^2} - \frac{f(x)}{x}$$

άρα η f' είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, οπότε το όριο έχει μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ και αφού η f είναι παραγωγίσιμη και f' συνεχής, εφαρμόζουμε τον κανόνα De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = f'(1) = 2.$$

ii. Στην $\textcircled{2}$ για $x = 1$ έχουμε

$$f'(1) = 0 + \frac{2F(1)}{1} - f(1) \Leftrightarrow 2 = 2F(1) \Leftrightarrow F(1) = 1$$





και επομένως $g(1) = \frac{F(1)}{1} = 1$ και αφού η g είναι σταθερή, είναι $g(x) = 1, x > 0$, άρα

$$\frac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1,$$

δηλαδή $F(x) = x^{\ln x}$.

Δ3. Η F είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $F'(x) = x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x}$.

Για $x = 1, F'(1) = 0$. Για $x > 1: \ln x > 0$, άρα $F'(x) > 0$.

x	0	1	$+\infty$
F'		-	+
F			

Η $F \downarrow (0, 1]$ και $F \uparrow [1, +\infty)$ με ολικό ελάχιστο για $x = 1$ το $F(1) = 1$.

Η $F(x^2) = F(x) - (x - 1)^2$ έχει προφανή λύση την $x = 1$ και η F έχει ολικό ελάχιστο για $x = 1$ το $F(1) = 1$, άρα $F(x^2) \geq 1$ και $F(x) \geq 1$.

Για $x > 1$ η $F \uparrow$, άρα $x < x^2 \Leftrightarrow F(x) < F(x^2) \Leftrightarrow 0 < F(x^2) - F(x)$ και $-(x - 1)^2 < 0$, άρα δεν υπάρχει λύση στο $(1, +\infty)$.

Για $x < 1$ έχουμε $x^2 < x \xrightarrow{F \downarrow} F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0$ και $-(x - 1)^2 < 0$, άρα δεν υπάρχει λύση στο $(0, 1)$, άρα η $x = 1$ είναι μοναδική λύση.

Δ4. Είναι

$$E = \int_1^e |F(x)| dx = \int_1^e F(x) dx.$$

Είναι $F(x) = x^{\ln x} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}$.

Όμως από γνωστή ανισότητα ισχύει $e^x \geq x + 1$. Θέτουμε όπου x το $\ln^2 x$ άρα έχουμε

$$e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$$

και αφού η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$ είναι

$$\int_1^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \Rightarrow E > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \quad (3)$$





Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}\int_1^e (\ln^2 x + 1) dx &= \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx \\&= \int_1^e (x)' \ln^2 x dx + [x]_1^e \\&= [\ln^2 x \cdot x]_1^e - \int_1^e 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x dx + e - 1 \\&= e \cdot \ln^2 e - 0 - 2 \int_1^e \ln x dx + e - 1 \\&= e - 2 \int_1^e \ln x (x') dx + e - 1 \\&= e - 2 \left[[x \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot x dx \right] + e - 1 \\&= e - 2 (e - [x]_1^e) + e - 1 \\&= 2 - 2(e - e + 1) + e - 1 \\&= 2e - 3.\end{aligned}$$

Επομένως από την ③, $E > 2e - 3$.

Επιμέλεια:

Γιάννης Θεοδώρου
Μαργαρίτα Κυριτσάκη
Νίκος Βαρδουλάκης
Κατερίνα Πολάκη
Μιχάλης Τσαγκαράκης

